(Ova stranica je ostavljena prazna)

ELEMENTI TEORIJE POLJA*)

Vektorsko polje, divergencija i rotor

4401. Naći vektorske linije homogenog polja $\mathbf{A}(P) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ (a, b i c su konstante).

4402. Naći vektorske linije ravnog polja $\mathbf{A}(P) = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}$, ($\omega$ je konstanta).

4403. Naći vektorske linije polja $\mathbf{A}(P) = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j} + h\mathbf{k}$ (ω i h su konstante).

4404. Naći vektorske linije polja:

1) $\mathbf{A}(P) = (y+z)\mathbf{i} - x\mathbf{j} - x\mathbf{k}$;

2) $\mathbf{A}(P) = (z-y)\mathbf{i} + (x-z)\mathbf{j} + (y-x)\mathbf{k}$:

3) $\mathbf{A}(P) = x(y^2-z^2)\mathbf{i} - y(z^2+x^2)\mathbf{j} + z(x^2+y^2)\mathbf{k}$.

U zadacima 4405 — 4408 izračunati divergenciju i rotor datih vektorskih polja.

4405. $\mathbf{A}(P) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

4406. $\mathbf{A}(P) = (y^2+z^2)\mathbf{i} + (z^2+x^2)\mathbf{j} + (x^2+y^2)\mathbf{k}$.

4407. $\mathbf{A}(P) = x^2yz\mathbf{i} + xy^2z\mathbf{j} + xyz^2\mathbf{k}$.

4408. $\mathbf{A}(P) = \operatorname{grad}(x^2+y^2+z^2)$.

4409. Sila $F\mathbf{i}$ konstantnog intenziteta F obrazuje vektorsko polje; izračunati divergenciju i rotor toga polja.

4410. Ravno vektorsko polje definisano je silom obrnuto proporcionalnom kvadratu odstojanja njene napadne tačke od koordinatnog početka i usmerenom prema koordinatnom početku (npr. ravno električno polje obrazovano naelektrisanom materijalnom tačkom); naći divergenciju i rotor polja.

4411. Naći divergenciju i rotor prostranog polja ako je sila polja podčinjena istim uslovima kao i u zadatku 4410.

4412. Vektorsko polje je definisano silom obrnuto proporcionalnom odstupanju njene napadne tačke od z-ose, normalnom na tu osu i usmerenom prema njoj; izračunati divergenciju i rotor toga polja.

4413. Vektorsko polje je definisano silom obrnuto proporcionalnom odstojanju njene napadne tačke od ravni xOy i usmerenom prema koordinatnom početku; izračunati divergenciju tog polja.

4414. Izračunati div $(a\boldsymbol{r})$ ako je a konstantan skalar.

4415. Dokazati relaciju

$$\operatorname{div}(\varphi A) = \varphi \operatorname{div} A + (A \operatorname{grad} \varphi),$$

u kojoj je $\varphi = \varphi(x, y, z)$ skalarna funkcija.

4416. Izračunati div $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})$ i div $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})$ ako su $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ konstantni vektori.

4417. Izračunati div $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})$ ako je $\boldsymbol{r}$ konstantan vektor.

4418. Ne prelazeći na koordinate izračunati divergenciju vektorskog polja:

1) $A(P) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{r}) - 2\boldsymbol{a}r^2$, 2) $A(P) = \dfrac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}$,

3) $\operatorname{grad} \dfrac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$

4419. Izračunati divergenciju vektorskog polja

$$A(P) = f(|\boldsymbol{r}|)\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}.$$

Dokazati da je divergencija ovog polja jednaka nuli samo onda kad je $f(|\boldsymbol{r}|) = \dfrac{C}{\boldsymbol{r}^2}$ ako je polje prostorno, i $f(|\boldsymbol{r}|) = \dfrac{C}{|\boldsymbol{r}|}$ ako je polje ravno, pri čemu je C proizvoljna skalarna konstanta.

4420. Dokazati da je

$$\operatorname{rot}[A_1(P) + A_2(P)] = \operatorname{rot} A_1(P) + \operatorname{rot} A_2(P).$$

4421. Izračunati rot $[\varphi A(P)]$, ako je $\varphi = \varphi(x, y, z)$ skalarna funkcija.

4422. Izračunati rot $r\boldsymbol{a}$ ako je r intenzitet vektora položaja tačke, a $\boldsymbol{a}$ je konstantan vektor.

4423. Izračunati rot $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})$ ako je $\boldsymbol{a}$ konstantan vektor.

4424. Kruto telo obrće se konstantnom ugaonom brzinom ω oko ose: naći divergenciju i rotor polja linearnih brzina.

4425. Dokazati relaciju

$$\boldsymbol{n}(\operatorname{grad}(A\boldsymbol{n}) - \operatorname{rot}(A\times\boldsymbol{n})) = \operatorname{div} A,$$

ako je $\boldsymbol{n}$ jedinični konstantan vektor.

Diferencijalne operacije vektorske analize (grad, div, rot) zgodno je obeležavati pomoću simboličnog vektora ∇ (Hamiltonov „nabla“ operator):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

Primenu ovog operatora na ovu ili onu (skalarnu ili vektorsku veličinu) treba shvatiti ovako: po pravilima vektorske algebre treba pomnožiti vektor ∇ datom veličinom, a zatim množenje simbola $\frac{\partial}{\partial x}$ i tsl. veličinom S shvatiti kao izračunavanje odgovarajućeg izvoda. Tada je $\operatorname{grad} u = \nabla u$; $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \nabla \boldsymbol{A}$; $\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A}$.

Pomoću Hamiltonova operatora mogu se predstaviti i diferencijalne operacije drugog reda: $\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \nabla \nabla u$; $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \nabla \times \nabla u$; $\operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{A} = \nabla (\nabla \boldsymbol{A})$; $\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \nabla (\nabla \times \boldsymbol{A})$; $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A})$.

4426. Dokazati da je $\boldsymbol{r} \cdot \nabla r^n = n r^n$, pri čemu je $\boldsymbol{r}$ vektor položaja tačke.

4427. Dokazati relacije:

1) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0$; 2) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = 0$.

4428. Dokazati da je

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

(Ovaj se izraz naziva Laplasovim operatorom i obično se obeležava sa Δu. Pomoću Hamiltonova operatora ova se veličina može pisati u obliku $\Delta u = (\nabla \nabla) u = \nabla^2 u$).

4429. Dokazati da je

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{A}(P) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{A}(P) - \Delta \boldsymbol{A}(P),$$

pri čemu je

$$\Delta \boldsymbol{A}(P) = \Delta A_x \boldsymbol{i} + \Delta A_y \boldsymbol{j} + \Delta A_z \boldsymbol{k}.$$

Potencijal

4430. Vektorsko polje definisano je konstantnim vektorom $\boldsymbol{A}$; uveriti se da to polje ima potencijal i naći taj potencijal.

4431. Vektorsko polje definisano je silom proporcionalnom odstojanju napadne tačke od koordinatnog početka i usmerenom prema koordinatnom početku; pokazati da je to polje konzervativno i naći njegov potencijal.

4432. Sile polja su obrnuto proporcionalne odstojanju njihovih napadnih tačaka od ravni Oxy i usmerene su prema koordinatnom početku; hoće li polje biti konzervativno?

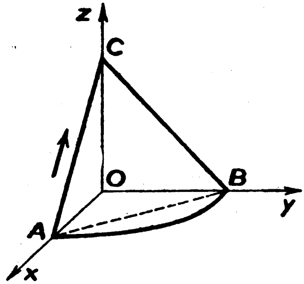
4433. Sile polja su obrnuto proporcionalne kvadratu odstojanja njihovih napadnih tačaka od z-ose i usmerene prema koordinatnom početku; hoće li polje biti konzervativno?

4434. Vektorsko polje definisano je silom obrnuto proporcionalnom odstojanju njene napadne tačke od z-ose, normalnom na tu osu i usmerenom ka njoj; pokazati da je to polje konzervativno i naći njegov potencijal.

4435. Linearne brzine tačaka krutog tela koje se obrće oko neke ose obrazuju vektorsko polje; je li to polje potencijalno?

4436. Sile polja definisane su ovako: $A(P)=f(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ (tzv. centralno polje; $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$); pokazati da je potencijal polja: $u(x, y, z)=\int_a^r f(r)\,dr$ i odavde kao specijalan slučaj izvesti potencijal polja sila privlačenja koje potiču od tačkaste mase, i potencijal polja u zadatku 4431.

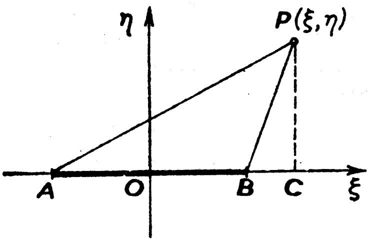
4437. Naći rad sila polja $A(p)=xy\,\boldsymbol{i}+yz\,\boldsymbol{j}+ +xz\,\boldsymbol{k}$ pri pomeranju tačke po zatvorenoj krivoj koja se sastoji iz odsečka prave $x+z=1$, $y=0$, četvrtine kružne linije $x^2+y^2=1$, $z=0$, i odsečka prave $y+z=1$, $x=0$ (sl. 78), — u smeru naznačenom na slici. Koliki će biti taj rad ako se luk BA zameni izlomljenom linijom BOA ili pravolinijskim odsečkom BA?



Sl. 78

Potencijal sile privlačenja*)

4438. U ravni $O\xi\eta$ dat je homogen štap AB dužine $2l$ i linearne gustine δ, koji leži na ξ-osi simetrično u odnosu na koordinatni početak (sl. 79).



Sl. 79

a) Naći potencijal $u(x, y)$ štapa.

b) Pokazati da projekcije X i Y sile privlačenja koja dejstvuje na tačku P mase m, čije su koordinate $\xi=x$, $\eta=y$, imaju vrednosti:

$$X=mk\delta\left(\frac{1}{PA}-\frac{1}{PB}\right),$$

$$Y=-\frac{mk\delta}{y}\left(\frac{CB}{PB}+\frac{AC}{PA}\right),$$

a jačina R rezultujuće sile je $R=\frac{2mk\delta}{y}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$, pri čemu je k gravitaciona konstanta (C je projekcija tačke P na osu $O\xi$, α je ugao APC, a β — ugao BPC).

4439. Naći potencijal kružne linije $x^2+y^2=R^2$, $z=0$, u tački $(R, 0, 2R)$ ako je gustina u svakoj tački jednaka apsolutnoj vrednosti sinusa ugla između vektora položaja tačke i apscisne ose.

4440. Naći potencijal prvog zavoja homogene (gustina je δ) zavojnice $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ u koordinatnom početku.

4441. Naći potencijal homogenog kvadrata stranice a (površinska gustina je δ) u jednom od njegovih temena.

4442. U ravni Oxy raspodeljena je masa tako da joj gustina δ zavisi od odstojanja ρ tačke od koordinatnog početka po sledećem zakonu:

$$\delta = \frac{1}{1+\rho^2};$$

4443*. Izračunati potencijal homogene bočne površine pravog kružnog cilindra:

1) u centru njegove osnove;

2) u sredini njegove ose (poluprečnik cilindra je R, visina je H, a površinska gustina δ).

4444. Izračunati potencijal homogene bočne površine pravog kružnog konusa (poluprečnika osnove R i visine H) u njegovom vrhu.

4445. Dat je prav kružni homogeni cilindar (poluprečnik osnove je R, visina H, gustina δ).

1) Naći potencijal u centru osnove cilindra.

2) Naći potencijal u sredini njegove ose.

4446. Dat je prav kružni homogeni konus (poluprečnik osnove je R visina H, gustina δ); naći potencijal konusa u njegovom vrhu.

4447. Naći potencijal homogene polulopte $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ $(z \geqslant 0)$ u tački $A(0, 0, a)$, ako joj je gustina δ. (Razmotriti dva slučaja: $a \geqslant R$ i $a \leqslant R$.)

4448*. Naći potencijal homogene šuplje lopte gustine δ ograničene dvema koncentričnim sferama čiji su poluprečnici R i r $(R>r)$, — u tački koja leži na udaljenosti a od centra lopte. (Razmotriti tri slučaja: $a \geqslant R$, $a \leqslant r$ i $r \leqslant a \leqslant R$). Pokazati da ako se tačka nalazi u unutrašnjoj šupljini lopte onda je privlačna sila koja dejstvuje na tu tačku jednaka nuli. (Uporedi i zadatak 3698)

4449. Naći potencijal nehomogene masivne kugle $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ u tački $A(0, 0, a)$ $(a>R)$, ako je gustina $\delta = \lambda \cdot z^2$, tj. proporcionalna je kvadratu odstojanja tačke od ravni Oxy.

Protok (fluks) i cirkulacija (u ravni)

4450. Izračunati protok i cirkulaciju konstantnog vektora A duž proizvoljne zatvorene krive L.

4451. Izračunati protok i cirkulaciju vektora $A(P) = a\boldsymbol{r}$, pri čemu je a — konstantan skalar, a $\boldsymbol{r}$ — vektor položaja tačke P, — duž proizvoljne zatvorene krive L.

4452. Izračunati protok i cirkulaciju vektora $A(P) = x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}$ duž proizvoljne zatvorene krive L.

4453. Izračunati protok i cirkulaciju vektora $A(P) = (x^3-y)\boldsymbol{i} + (y^3+x)\boldsymbol{j}$ duž kružnice poluprečnika R sa centrom u koordinatnom početku.

4454. Potencijal polja brzinâ čestica tečnosti je $u = \ln r$ $(r = \sqrt{x^2+y^2})$; odrediti količinu tečnosti koja ističe u jedinici vremena kroz zatvorenu konturu opisanu oko kordinatnog početka (protok), i količinu tečnosti koja protiče u jedinici vremena duž te konture (cirkulacija). Koliki će biti rezultat ako centar leži van konture?

4455. Potencijal polja brzinâ čestica tečnosti je $u=\varphi$, pri čemu je $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$; odrediti protok i cirkulaciju vektora brzina duž zatvorene konture L.

4456. Potencijal polja brzinâ čestica tečnosti je $u(x, y)=x(x^2-3y^2)$; izračunati količinu tečnosti koja protekne u jedinici vremena kroz pravolinijski odsečak koji spaja koordinatni početak sa tačkom $(1,1)$.

Protok i cirkulacija (u prostoru)

4457. Dokazati da je početak vektora položaja $\boldsymbol{r}$ kroz svaku zatvorenu površinu jednak trostrukoj zapremini tela ograničenog tom površinom.

4458. Izračunati protok vektora položaja kroz bočnu površinu kružnog cilindra (poluprečnik osnove je R, visina H), ako osa cilindra prolazi kroz koordinatni početak.

4459. Koristeći rezultate zadataka 4457 i 4458 utvrditi koliki je protok vektora položaja kroz obe osnove cilindra prethodnog zadatka.

4460. Izračunati protok vektora položaja kroz bočnu površinu kružnog konusa čija osnova leži u ravni xOy, a osa mu se poklapa sa z-osom. (Visina konusa je $=1$, a poluprečnik osnove je $=2$).

4461. Naći protok vektora $A(P)=xy\,\boldsymbol{i}+yz\,\boldsymbol{j}+xz\,\boldsymbol{k}$ kroz onaj deo površine sfere $x^2+y^2+z^2=1$ koji leži u prvom oktantu.

4462*. Naći protok vektora $A(P)=yz\,\boldsymbol{i}+xz\,\boldsymbol{j}+xy\,\boldsymbol{k}$ kroz bočnu površinu piramide sa vrhom u tački $S(0, 0, 2)$, čija je osnova trougao sa temenima $0(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$ i $B(0, 1, 0)$.

4463. Izračunati cirkulaciju vektora položaja jednog zavoja AB zavojnice $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, ako su A i B tačke koje odgovaraju vrednostima 0 i 2π parametra t.

4464. Kruto telo se obrće konstantnom ugaonom brzinom ω oko z-ose; izračunati cirkulaciju polja linearnih brzina duž kružne linije poluprečnika R, čiji centar leži na osi obrtanja a ravan joj je normalna na tu osu, — u smeru u kom se vrši obrtanje.

4465*. Izračunati protok rotora vektorskog polja $A(P)=y\,\boldsymbol{i}+z\,\boldsymbol{j}+x\,\boldsymbol{k}$ kroz površinu obrtnog paraboloida $z=2(1-x^2-y^2)$ koju od njega odseca ravan $z=0$

REZULTATI

4401. Prave paralelne vektoru $A\,\{a,\ b,\ c,\}$: $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$.

4402. Krugovi sa centrom u kordinatnom početku.

4403. Zavojnice sa visinom hoda $\dfrac{2\pi h}{\omega}$, koje leže na cilindrima čije se ose poklapaju sa z-osom: $x=R\cos(\omega t+\alpha)$, $y=R\sin(\omega t+\alpha)$, $z=ht+z_0$, pri čemu su R, α i z_0 proizvoljne konstante.

4404. 1) Krugovi $x^2+y^2+z^2=R^2$, $y-z+C=0$, po kojima ravni paralelne simetralnoj ravni $y-z=0$ presecaju sfere sa zajedničkim centrom u koordinatnom početku (R i C su proizvoljne konstante.

2) Krugovi $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x+y+z=C$ po kojima ravni, koje od koordinatnih osa odsecaju odsečke iste dužine i znaka, presecaju sfere sa zajedničkim controm u koordinatnom početku.

3) Krive po kojima se presecaju sfere $x^2+y^2+z^2=R^2$ i hiperbolični paraboloidi $zy=Cx$.

4405. div $A=3$, rot $A=0$.

4406. div $A=0$, rot $A=2[(y-z)i+(z-x)j+(x-y)k]$.

4407. div $A=6xyz$, rot $A=x(z^2-y^2)i+y(x^2-z^2)j+z(y^2-x^2)k$.

4408. div $A=6$, rot $A=0$.

4409. div $A=0$, rot $A=0$.

4410. div $A=\dfrac{k}{r^2}$, gde je k koeficijent proporcionalnosti, a r — odstojanje napadne tačke sile od koordinatnog početka; rot $A=0$.

4411. div $A=0$, rot $A=0$.

4412. div $A=0$, rot $A=0$. U tačkama z-ose polje nije definisano.

4413. div $A=-\dfrac{k}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, gde je k koeficijent proporcionalnosti. U tačkama ravni Oxy polje nije definisano.

4414. $3a$. **4416.** div $b(ra)=(ab)$, div $r(ra)=4(ra)$.

4417. 0. **4418.** 1) 0. 2) 0. 3) 0.

4419. div $A=\dfrac{2f(r)}{r}+f'(r)$, ako je polje prostorno, i div $A=\dfrac{f(r)}{r}+f'(r)$ ako je polje ravno.

4421. φ rot $A+(\text{grad}\,\varphi\times A)$. **4422.** $\dfrac{r\times A}{r}$.

4423. $2a$. **4424.** ωn_0, gde je n_0 jedinični vektor paralelan osi obrtanja.

4430. $u=Ar+C$. **4431.** $u=-\dfrac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2)+C$. **4432.** Neće. **4433.** Neće.

4434. $u=-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C$. **4435.** Nema.

4437. $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{2}$. **4438.** $k\delta\ln\dfrac{\sqrt{(l-x)^2+y^2}+l-x}{\sqrt{(l+x)^2+y^2}-l-x}$.

4439*). $4k(\sqrt{2}-1)$.

4440. $\dfrac{k\delta\sqrt{a^2+b^2}}{b}\ln\dfrac{2\pi b+\sqrt{a^2+4\pi^2b^2}}{a}$.

4441. $2k\delta a\ln(1+\sqrt{\cdot})$. **4442.** $\frac{2\pi k}{\sqrt{1-h^2}}\arccos h$, ako je $h<1$, $2\pi k$, ako je $h=1$.

$\frac{2\pi k}{\sqrt{h^2-1}}\ln(h+\sqrt{h^2-1})$, ako je $h>1$.

4443*. 1) $2k\pi R\delta\frac{H+\sqrt{H^2+R^2}}{R}$, 2) $4k\pi R\delta\ln\frac{H+\sqrt{H^2+4R^2}}{2R}$.

Prepoloviti cilindar presekom paralelnim osnovi i izračunati potencijal bočne površine cilindra kao zbir potencijala bočnih površina obe njegove polovine, koristeći rezultat iz tačke 1).

4444. $2k\pi R\delta$.

4445*. 1) $k\pi\delta\left[H\sqrt{R^2+H^2}-H^2+R^2\ln\frac{H+\sqrt{R^2+H^2}}{R}\right]$,

2) $\frac{k\pi\delta}{2}\left[H\sqrt{4R^2+H^2}-H^2+4R^2\ln\frac{H+\sqrt{4R^2+H^2}}{2R}\right]$;

(vidi uputstvo u zadatku 4443).

4446. $\pi k\delta H(l-H)$, gde je l izvodnica konusa.

4447. $u=\frac{2}{3}k\frac{\pi R^3\delta}{a}\left[\left(1+\frac{a^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{a}{R}\right)^3-\frac{3a}{2R}+1\right]$ za $a\geqslant R$;

$u=\frac{2}{3}k\pi a^2\delta\left[\left(1+\frac{R^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{R}{a}\right)^3+\frac{3}{2}\left(\frac{R}{a}\right)^2-2\right]$ za $a\leqslant R$;

$u=\frac{k\pi R^2\delta}{3}(4\sqrt{2}-3)$ za $a=R$.

4448*. $u=\frac{4k\pi\delta}{3a}(R^3-r^3)=\frac{kM}{a}$ (M je masa tela) za $a\geqslant R$;

$u=2k\pi\delta(R^2-r^2)$ za $a\leqslant r$;

$u=\frac{4k\pi\delta}{3a}(a^3-r^3)+2\pi\delta(R^2-a^2)$ za $r\leqslant a\leqslant R$.

Postaviti koncentričnu sferu poluprečnika a i primeniti rezultate prva dva slučaja.

4449. $\frac{kM}{a}\left[1+\frac{2}{7}\left(\frac{R}{a}\right)^2\right]$, gde je M masa kugle.

4450. I protok i cirkulacija su jednaki nuli.

4451. Vrednost protoka je $2aS$, gde je S površina oblasti ograničene konturom L cirkulacija je jednaka nuli.

4452. I protok i cirkulacija su jednaki nuli.

4453. Vrednost protoka je $\frac{2}{3}\pi R^4$, a cirkulacija je $2\pi R^2$.

4454. U slučaju kad koordinatni početak leži unutar konture protok ima vrednost 2π, protivnom slučaju njegova je vrednost nula; cirkulacija je u oba slučaja jednaka nuli.

4455. Ako koordinatni početak leži unutar konture cirkulacija je 2π, a ako leži van onture vrednost cirkulacije je 0; protok je u oba slučaja jednak nuli.

4456. 2. **4458.** $2\pi R^2 H$. **4459.** $\pi R^2 H$.

4460. 4π. Izračunati protok kroz osnovu konusa i iskoristiti rezultat zadatka 4457.

4461 $\frac{3\pi}{16}$.

4462*. $\frac{1}{6}$. Primeniti formulu Ostrogradskog i izračunati protok kroz osnovu piramide

4463. $2\pi^2 b^2$. **4464.** $2\pi\omega R^2$.

4465. $-\pi$. Primeniti Škotsovu formulu uzimajući za konturu L krivu po kojoj ravan Oxy preseca paraboloid.